* R R - 0 8 2 9 / 6 0 0 *

RR-0829

Third Year B. Sc. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - VIII

(Numerical Analysis) (New Course)

Time : 3 Hours] [Total Marks : **70**

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :
☛ **T. Y. B. Sc.**

Name of the Subject :
☛ **Mathematics - 8 (New)**

☛ Subject Code No. : **0 8 2 9** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **Nil**

Seat No. : [ ][ ][ ][ ][ ][ ]

Student's Signature

(૨) **જમણી** બાજુના અંક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

(૩) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

(૪) "Scientific Non-programmable Calculator"નો ઉપયોગ કરવો.

૧ માગ્યા મુજબ જવાબ આપો : **૧૦**

(૧) નીચેની સંખ્યાઓને બે દશાંશ સ્થળ સુધી સરખી કરો :
(i) 52.275 (ii) 7.865

(૨) નીચેની સંખ્યાઓને ચાર સાર્થક અંક સુધી સરખી કરો :
(i) 2.36459 (ii) 0.0022218

(૩) નિરપેક્ષ ત્રુટિની વ્યાખ્યા આપો.

(૪) સાપેક્ષ ત્રુટિની વ્યાખ્યા આપો.

(૫) 'ક્રમિકોની રીત' સફળ બને તે માટેની શરત જણાવો.

(૬) સાબિત કરો કે : $\Delta \equiv E\nabla$.

(૭) સાબિત કરો કે : $\mu\delta \equiv \frac{1}{2}(\Delta + \nabla)$.

(૮) (x, y)ની આપેલ $(n+1)$ જોડ $(x_i, y_i) : i = 0, 1, 2, ..., n$ માટેનું 'લાગ્રાન્જનું અંતર્વેશન સૂત્ર' જણાવો.

(૯) જો $f(x) = \frac{1}{x^2}$ હોય તો વિભાજિત અંતર $[a, b]$ની કિંમત શોધો.

(૧૦) સિમ્પસનના $-\frac{1}{3}-$ નિયમમાં ત્રુટિ જણાવો.

૨ (અ) સમીકરણ $f(x)=0$ના વાસ્તવિક બીજ મેળવવાની 'ક્રમિકોની રીત' સમજાવો. તેની અસફળતાની બે આકૃતિઓ દોરો. ૪

(બ) બે સંખ્યાઓના ગુણાકાર $a \cdot b$માં નિરપેક્ષ ત્રુટિ શોધો; જ્યાં $a=56.54$ તથા $b=12.4$ છે. ૪

(ક) સમીકરણ $f(x)=x^3-x-1=0$ના વાસ્તવિક બીજને 'દુભાજક પદ્ધતિ'થી શોધો. ૪

અથવા

૨ (અ) 'દુભાજક પદ્ધતિ'ની અભિસારી વર્ણવો. ૪

(બ) (૧) જો $x=0.51$ એ બે દશાંશ સ્થળ સુધી સાચી હોય, તો સાપેક્ષ ત્રુટિ શોધો. ૪

(૨) જો πની અંદાજિત કિંમત $X_1=3.1428571$ આપવામાં આવી હોય અને તેની સાચી કિંમત $X=3.1415926$ છે, તો નિરપેક્ષ તથા સાપેક્ષ ત્રુટિ શોધો.

(ક) સમીકરણ $f(x)=x^3+x^2-1=0$ના વાસ્તવિક બીજને 'ક્રમિકોની રીતથી શોધો. ૪

૩ (અ) સમીકરણ $f(x)=0$ના વાસ્તવિક બીજ શોધવા માટેનું 'ન્યૂટન-રાફ્સન સૂત્ર' મેળવો. તેની અસફળતાને આકૃતિ દ્વારા સમજાવો. ૪

(બ) સમીકરણ $f(x)=x^3-2x-5=0$ના વાસ્તવિક બીજને 'મિથ્યા-સ્થાન પદ્ધતિ'થી મેળવો. ૪

(ક) સાબિત કરો કે : ૪

(૧) $\nabla \equiv \delta E^{-\frac{1}{2}}$;

(૨) $u_x-\Delta^n u_{x-n}=u_{x-1}+\Delta u_{x-2}+\Delta^2 u_{x-3}+\ldots..+\Delta^n u_{x-n}$

અથવા

૩ (અ) સાબિત કરો કે 'ન્યૂટન-રાફ્સન પદ્ધતિ'માં અભિસારીની કક્ષા 2 છે. ૪

(બ) સમીકરણ $f(x)=x^3-25=0$ના વાસ્તવિક બીજને 'ન્યૂટન-રાફ્સન પદ્ધતિ'થી મેળવો. ૪

(ક) સાબિત કરો :

(૧) $\Delta-\nabla \equiv \delta^2$;

(૨) $\Delta^n u_{x-n}=u_x-n u_{x-1}+\frac{n(n-1)}{2!}u_{x-2}+\ldots.+(-1)^n u_{x-n}$.

૪ (અ) 'ન્યૂટનનું પ્રગતાન્તર અંતર્વેશન સૂત્ર' મેળવો. ૪

(બ) આપેલા કોષ્ટક પરથી $f(0.12)$ શોધો : ૪

x :	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$y = f(x)$:	0.1003	0.1511	0.2027	0.2553	0.3093

(ક) આપેલા કોષ્ટક પરથી 60 અને 70 વચ્ચે ગુણાંક મેળવનારા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો : ૪

$x =$ *ગુણાંક* :	0 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 120
$y =$ ***વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા :***	250	120	100	70	50

અથવા

૪ (અ) 'ન્યૂટનનું વિભાજિત-અંતર અંતર્વેશન સૂત્ર' મેળવો. ૪

(બ) 'ન્યૂટનના વિભાજિત-અંતર અંતર્વેશન સૂત્ર'નો ઉપયોગ કરી, કોષ્ટકની કિંમતોનું સમાધાન કરતી બહુપદી શોધો : ૪

x :	0	1	3	4	6
$y = f(x)$:	7	8	34	71	223

(ક) 'લાગ્રાન્જના અંતર્વેશન સૂત્ર'નો ઉપયોગ કરી કોષ્ટકની કિંમતોનું સમાધાન કરતી બહુપદી $f(x)$ મેળવો અને તે પરથી $f(1)$ શોધો :

x :	0	3	4
$y = f(x)$:	12	6	8

૫ (અ) 'ગૉસનું પૃષ્ઠાંતર અંતર્વેશન સૂત્ર' મેળવો. ૪

(બ) જો $f(25) = 0.2707, f(30) = 0.3027, f(35) = 0.3386$ તથા $f(40) = 0.3794$ હોય, તો 'ગૉસના પ્રગતાન્તર અંતર્વેશન સૂત્ર'નો ઉપયોગ કરી $f(32)$ શોધો. ૪

(ક) 'બેસલના અંતર્વેશન સૂત્ર'નો ઉપયોગ કરી, નીચેના કોષ્ટક માટે $f(25)$ મેળવો : ૪

x :	20	24	28	32
$y = f(x)$:	24	32	35	40

અથવા

૫ (અ) પ્રચલિત સંકેતોમાં સાબિત કરો કે : ૪

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta\, y_0 - \frac{1}{2}\,\Delta^2\, y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3\, y_0 - \frac{1}{4}\,\Delta^4\, y_0 + \ldots\ldots\right]$$

(બ) નીચેના કોષ્ટક પરથી, $x = 3.5$ આગળ $\frac{d^2y}{dx^2}$ શોધો : ૪

x :	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$y = f(x)$:	3	9	18	28	40

(ક) 'ગૌસના પૃષ્ઠાંતર અંતર્વેશન સૂત્ર'નો ઉપયોગ કરી, નીચેના કોષ્ટક પરથી વર્ષ 1946માં વસ્તી વધારો શોધો : ૪

x = વર્ષ :	1931	1941	1951	1961	1971
y = વસ્તી (લાખમાં) :	15	20	27	39	52

૬ (અ) 'સિમ્પસનના -$\frac{1}{3}$ -નિયમ'ને મેળવો. ૪

(બ) 'સમલંબકના નિયમ'નો ઉપયોગ કરી, $h = 0.125$ લઈ, $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ની કિંમત મેળવો. ૪

(ક) પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન : $\frac{dy}{dx} = -y\ ;\ y(0) = 1$નો ઉકેલ, $h = 0.01$ લઈ, 'ઓઈલરની પદ્ધતિ'થી $y\,(0.04)$ શોધો. ૪

અથવા

૬ (અ) પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન : $\frac{dy}{dx} = f(x, y)\,;\ y(x_0) = y_0$ ને ઉકેલવા માટે 'પિકાર્ડની આસાદાન પદ્ધતિ' સમજાવો. ૪

(બ) 'ઑઈલરની સંશોધિત પદ્ધતિ'થી પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન ૪

$\frac{dy}{dx} = x^2 + y\ ;\ y(0) = 1$;નો ઉકેલ, $h = 0.05$ લઈ, $y\,(0.05)$ની કિંમત શોધો.

(ક) 'પિકાર્ડની આસાદાન પદ્ધતિ'નો ઉપયોગ કરી, પ્રારંભિક મૂલ્ય પ્રશ્ન ૪

$\frac{dy}{dx} = 1 + xy;\ y(0) = 1;$નો ઉકેલ ત્રણ (૩) આસાદાન સુધી મેળવો.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the instruction no. **1** of page no. **1**.
(2) Figures to the **right** indicate marks of the question.
(3) Follow usual notations.
(4) Use of "Scientific Non-programmable Calculator" is allowed.

1 Answer as directed : **10**

(1) Round-off the following numbers to two decimal places : (i) 52.275 (ii) 7.865

(2) Round-off the following numbers to four significant digits :
(i) 2.36459 (ii) 0.0022218

(3) Define Absolute Error.

(4) Define Relative Error.

(5) State the condition for 'the Iteration Method' to succeed.

(6) Prove that : $\Delta \equiv E\nabla$.

(7) Prove that : $\mu\delta \equiv \frac{1}{2}(\Delta + \nabla)$.

(8) State the formula for 'Lagrange's Interpolation', when (n + 1) pairs $(x_i, y_i) : i = 0, 1, 2, ..., n$ of (x, y) are given.

(9) If $f(x) = \frac{1}{x^2}$, then find the value of the divided-difference $[a, b]$

(10) State the error in the Simpson's -$\frac{1}{3}$- Rule.

2 (a) Explain 'the Iteration Method' to obtain a real root of the equation $f(x) = 0$. Draw two diagrams of its failure. **4**

(b) Find the absolute error in the product $a \cdot b$; where $a = 56.54$ and $b = 12.4$. **4**

(c) Find a real root of the equation $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$, by 'The Bisection method'. **4**

OR

2 (a) Describe the convergence of 'The Bisection method'. 4

(b) (1) If $x = 0.51$ is correct to two decimal places, then find the relative error. 4

(2) If an approximate value of π is given by $X_1 = 3.1428571$ and its true value is $X = 3.1415926$, then find the absolute and relative errors.

(c) Find a real root of the equation $f(x) = x^3 + x^2 - 1 = 0$ by 'The Iteration method'. 4

3 (a) Obtain 'The Newton-Raphson Formula' to find a real root of the equation $f(x) = 0$. Explain its failure by a diagram. 4

(b) Obtain a real root of the equation $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ by 'The Method of False-Position'. 4

(c) Prove that : 4

(i) $\nabla \equiv \delta\, E^{-\frac{1}{2}}$;

(ii) $u_x - \Delta^n u_{x-n} = u_{x-1} + \Delta\, u_{x-2} + \Delta^2\, u_{x-3} + ... + \Delta^n u_{x-n}$

OR

3 (a) Prove that the order of convergence of 'the Newton-Raphson method' is 2 4

(b) Obtain a real root of the equation $f(x) = x^3 - 25 = 0$ by 'The Newton-Raphson method'. 4

(c) Prove that : 4

(1) $\Delta - \nabla \equiv \delta^2$;

(2) $\Delta^n\, u_{x-n} = u_x - n\, u_{x-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\, u_{x-2} + ... + (-1)^n\, u_{x-n}.$

4 (a) Derive 'Newton's - Forward - Difference Interpolation Formula'. 4

(b) Using the following table find $f(0.12)$: 4

x :	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$y = f(x)$:	0.1003	0.1511	0.2027	0.2553	0.3093

(c) For the given table, find the number of students, who have obtained marks between 60 and 70 : 4

$x =$ *Marks* :	0 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 120
$y =$ *No. of students* :	250	120	100	70	50

OR

4 (a) Derive 'Newton's Divided - Difference Interpolation Formula'. 4

(b) Using 'Newton's Divided - Difference Interpolation Formula, obtain a polynomial $f(x)$, satisfying tabular values : 4

x :	0	1	3	4	6
$y = f(x)$:	7	8	34	71	223

(c) Using 'Lagrange's Interpolation Formula', obtain a polynomial $f(x)$ satisfying tabular values and hence find $f(1)$: 4

x :	0	3	4
$y = f(x)$:	12	6	8

5 (a) Derive 'Gauss' Backward - Difference Interpolation Formula'. 4

(b) Using 'Gauss' Forward - Difference Interpolation Formula', find $f(32)$ given that : 4

$f(25) = 0.2707$, $f(30) = 0.3027$, $f(35) = 0.3386$ and

$f(40) = 0.3794$.

(c) Using 'Bessel's Interpolation Formula', obtain $f(25)$, for the given table : 4

x :	20	24	28	32
$y = f(x)$:	24	32	35	40

OR

5 (a) Prove, in usual notations, that 4

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\Delta\, y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3\, y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \ldots\ldots\right]$$

(b) From the following table, find $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $x = 3.5$: 4

x :	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$y = f(x)$:	3	9	18	28	40

(c) Using 'Gauss' Backward - Difference Interpolation Formula', find the population in the year 1946; given that : **4**

$x = Year$:	1931	1941	1951	1961	1971
$y = Population\ (in\ Lakhs)$:	15	20	27	39	52

6 (a) Derive 'Simpson's - $\frac{1}{3}$ - Rule'. **4**

(b) Evaluate $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, by using 'Trapezoidal Rule'; by taking $h = 0.125$. **4**

(c) Using 'Euler's method', by taking $h = 0.01$; find $y\,(0.04)$ for the Initial value problem **4**

$$\frac{dy}{dx} = -y \; ; \; y(0) = 1$$

OR

6 (a) Explain 'Picard's Approximation method' to solve the Initial value problem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$. **4**

(b) Using 'Euler's Modified method' by taking $h = 0.05$; find $y\,(0.05)$ for the initial value problem : **4**

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y \; ; \; y(0) = 1.$$

(c) Using 'Picard's approximation method' to solve the initial value problem : **4**

$$\frac{dy}{dx} = 1 + xy; \; y(0) = 1;$$

upto three (3) approximations.